École des Hautes Études Commerciales — Mathématiques III

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991 — OPTION ÉCONOMIQUE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

EXERCICE 1

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Résoudre par la méthode du pivot de Gauss, en discutant suivant la valeur du paramètre λ, le système d'équations :

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)\,x_3 = 0 \end{cases}$$

En déduire les valeurs propres de la matrice M.

b) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable. Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de vecteurs propres de f que l'on choisira de manière que chacun d'eux ait, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, des coordonnées égales à 0 ou à 1.

2. À tout vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on associe la fonction φ_y de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi_y(x) = (y_1 + y_2)\,x_1 + (y_1 + 2y_2)\,x_2 + y_3 x_3$$

a) Le vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ étant fixé dans $\mathbb{R}^3$, exprimer $\varphi_y(f(x))$ en fonction des coordonnées x_1, x_2, x_3 de x.

b) Montrer qu'à chaque vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on peut faire correspondre un vecteur $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ et un seul de $\mathbb{R}^3$ tel que, pour vecteur x de $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi_y(f(x)) = \varphi_Y(x)$$

À cet effet, on exprimera Y_1, Y_2 et Y_3 en fonction de y_1, y_2 et y_3.

On pose $Y = g(y)$. Vérifier que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; en donner la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère la matrice : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ représenté par S dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Calculer l'inverse S^{-1} de S.

b) Calculer le produit matriciel SMS^{-1}.

c) En déduire que les vecteurs $s(V_1)$, $s(V_2)$ et $s(V_3)$ sont des vecteurs propres de la matrice ${}^tN$, transposée de la matrice N. Préciser les valeurs propres associées.

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère la fonction polynomiale P_n définie par la relation :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - a$$

A SUIVRE

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \leq a$.

2. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite. Prouver que $0 \leq \ell < 1$.

4. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n, le nombre x_n est solution de l'équation :

$$x^{n+1} - (a+1)\,x + a = 0$$

En déduire que : $\ell = \dfrac{a}{a+1}$

EXERCICE 3

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et par p un nombre réel tel que $0 < p < 1$.
On rappelle que le symbole $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

I. Un jour donné, un modèle de voiture est successivement examiné par N clients éventuels. On suppose que N est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres entiers naturels, telle que, pour tout couple (r, s) de nombres entiers naturels :

$$P(N \geq r+s / N \geq r) = P(N \geq s)$$

On suppose en outre que $P(N = 0) = p$.

1. Déterminer la probabilité $P(N \geq 1)$. En choisissant $r = s = 1$, calculer $P(N \geq 2)$. En déduire la valeur de $P(N = 1)$.

2. En raisonnant par récurrence, trouver, pour tout nombre entier naturel n, les probabilités $P(N \geq n)$ et $P(N = n)$.

3. Trouver l'espérance $E(N)$ et la variance $\mathrm{Var}(N)$ de N.

4. *Application numérique.* On suppose que $p = \dfrac{1}{10}$. Calculer $P(N = n)$, $E(N)$ et $\mathrm{Var}(N)$.

II. Parmi les clients qui examinent le modèle, certains passent commande, les autres non. Pour tout nombre entier naturel non nul i, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le $i^{\text{ième}}$ client passe commande d'une voiture et 0 dans le cas contraire. On convient que $X_0 = 0$.
On désigne par α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On suppose que la suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que, pour tout nombre entier naturel non nul i, $P(X_i = 1) = \alpha$. On suppose enfin que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et indépendantes de N.

1. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la loi de probabilité de S_n.

2. On note S la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de la façon suivante : pour tout élément ω de Ω, si $N(\omega) = n$, on pose $S(\omega) = S_n(\omega)$. Ainsi, S représente le nombre de voitures commandées. On se propose de trouver la loi de probabilité de S.

a) Soit k un nombre entier naturel. On admet (la justification n'est pas demandée) que, pour tout nombre réel fixé x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k\, x^n$ est convergente. On note σ_k la somme de cette série. Ainsi : $\sigma_k = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k\, x^n$.

Montrer que, pour tout nombre entier naturel k : $\sigma_{k+1} = x\sigma_k + x\sigma_{k+1}$

b) En déduire, par récurrence sur k, que : $\sigma_k = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

c) Trouver la loi de probabilité de S.

d) *Application numérique.* On suppose que $p = \dfrac{1}{10}$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Déterminer la loi de probabilité de S. Vérifier qu'elle est du même type que la loi de N obtenue dans la partie I. Calculer l'espérance et la variance de S.

FIN